HỌC VÀ TRUNG HỌC CHUYÊN NGHIỆP
ƯNG ĐẠI HỌC TỔNG HỢP HÀ-NỘI

NGUYỄN VĂN PHÓ

BÀI TOÁN KIỂM TRA VÀ THIẾT KẾ TỐI ƯU CỦA HỆ ĐÀN HỒI — DẺO

Luận án Phó tiến sĩ Toán Lý
(tóm tắt nội dung)

Ngành chuyên môn:

HÀ NỘI 1979

Luận án hoàn thành tại bộ môn Cơ học, khoa Toán, trường Đại học Tổng hợp Hà nội.

Cơ quan phản biện :

Người phản biện thứ nhất :

Người phản biện thứ hai :

Bản tóm tắt được gửi đi ngày tháng năm 1979.

Luận án được bảo vệ trước hội đồng chấm luận án Nhà nước.

Thời gian :

Địa điểm :

Ý kiến nhận xét gửi đến : Phòng Nghiên cứu khoa học trường Đại học Tổng hợp Hà nội.

Luận án lưu trữ tại : Thư viện trường Đại học Tổng hợp Hà nội.

MỞ ĐẦU

An toàn và tiết kiệm là hai vấn đề lớn đã được các nhà cơ học quan tâm nghiên cứu từ lâu, cho đến nay đã đạt được nhiều kết quả quan trọng.

Nhằm thực hiện nghị quyết Đại hội Đảng Cộng sản Việt nam lần thứ tư, hội nghị cơ học toàn quốc lần thứ hai (2-1977) đã quyết định chọn tư tưởng tối ưu hóa làm một trong những tư tưởng chủ đạo của công tác nghiên cứu và ứng dụng cơ học nước ta trong thời gian tới.

Với sự xuất hiện máy tính điện tử và sự hoàn thiện các thuật toán tối ưu hóa nói chung và quy hoạch toán học nói riêng, cho phép ta giải các bài toán tối ưu có ý nghĩa thực tiễn lớn lao.

Ngày nay vấn đề tối ưu không còn là vấn đề lý thuyết mà có ý nghĩa kinh tế rõ rệt. Theo thống kê các số liệu ở Liên xô M. I. Râytman đã đưa ra kết luận :

«... Khi thiết kế các kết cấu bêtông cốt thép đơn giản như dầm thì độ lệch trung bình từ thiết kế tối ưu là 5 — 7% ; đối với kết cấu phức tạp hơn như dầm có ứng suất trước thì độ lệch trung bình là 10 — 12% ; đối với dàn và tấm, đặc biệt là vỏ thì độ lệch trung bình có thể lên tới 30 — 40%... [15].

Mặt khác, an toàn và tối ưu không chỉ là vấn đề kinh tế đơn thuần, mà có tầm quan trọng đặc biệt trong lĩnh vực quốc phòng.

Trong những năm gần đây, số công trình nghiên cứu về bài toán kiểm tra và thiết kế tối ưu ngày càng tăng. Song còn nhiều vấn đề tồn tại trong cách đặt bài toán, phương pháp giải và ứng dụng vào công tác thiết kế.

Trong luận văn này chúng tôi nhằm nghiên cứu một số vấn đề tồn tại đó.

Những vấn đề chúng tôi nghiên cứu tập trung vào hai loại bài toán, bài toán kiểm tra và thiết kế tối ưu của hệ đàn-dẻo lý tưởng.

— Bài toán kiểm tra :

Hệ đã cho, hãy tìm các tổ hợp tải trọng đơn giản khác nhau tác dụng lên hệ, sao cho với các tổ hợp đó hệ không bị phá hoại dẻo, hoặc tìm các tổ hợp khác nhau của tải trọng phức tạp (kể cả tải trọng chu trình và nhiệt độ không dừng), mà hệ thích ứng (thích nghi).

Do đó, giải bài toán kiểm tra là tìm miền rộng nhất trong không gian tải trọng, sao cho hệ an toàn hoặc thích ứng đối với mọi điểm thuộc miền đó.

— Bài toán thiết kế :

Cho trước các tổ hợp tải trọng có thể tác dụng lên hệ, hãy tìm kích thước, cấu tạo của hệ, sao cho hệ không bị phá hoại dẻo đơn giản hoặc thích ứng đối với các tổ hợp tải trọng đã cho, đồng thời phiếm hàm mục tiêu đạt cực trị.

Đặt các bài toán như trên, rộng hơn cách đặt bài toán của các tác giả trước đây [17 — 20, 30].

Cơ sở lý luận cơ học để giải các bài toán trên là các định lý về lý thuyết cân bằng giới hạn ; định lý tĩnh về sự thích ứng của E. Melan ; định lý E. Melan mở rộng do chúng tôi chứng minh [11, 16].

Công cụ toán học để giải các bái toán trên là quy hoạch tuyến tính, quy hoạch tham số và quy hoạch phi tuyến

Phương pháp nghiên cứu là trên cơ sở lý luận cơ học, lập các bài toán cực trị tương ứng, đưa các bài toán đó về dạng đơn giản nhất để có thể giải bằng các thuật toán thông thường của quy hoạch toán học. Giải một số thí dụ bằng số để minh họa và so sánh. Chương cuối của luận văn nêu một số vấn đề có thể ứng dụng trực tiếp các kết quả thu được ở hai chương trên vào công tác thiết kế.

Các bài toán cực trị được thành lập là những bài toán quy hoạch trong không gian hàm, nói chung chỉ có thể tìm nghiệm gần đúng. Do đó, vấn đề sai số và ổn định nghiệm cần được nghiên cứu. Dựa theo các định lý và quan niệm về sai số và ổn định của phương án tối ưu trong lý thuyết quy hoạch, luận văn cũng đã đề nghị cách giải quyết các vấn đề đó.

Phần lớn nội dung của luận văn đã được đăng trong các tài liệu [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]

Luận văn gồm phần mở đầu và ba chương. Phần mở đầu trình bày tổng quan về tình hình nghiên cứu và ứng dụng bài toán kiểm tra và thiết kế tối ưu của hệ đàn hồi — dẻo trong và ngoài nước, qua đó xác định vị trí những vấn đề luận văn nghiên cứu.

Chương I, trình bày các kết quả thu được về bài toán kiểm tra và thiết kế tối ưu của hệ đàn-dẻo chịu tác dụng tải trọng đơn giản (tăng tỷ lệ với một tham số).

Chương II, trình bày các kết quả thu được về bài toán kiểm tra và thiết kế tối ưu của hệ đàn-dẻo chịu tác dụng tải trọng phức tạp.

Chương III, trình bày một số ứng dụng

CHƯƠNG I

BÀI TOÁN KIỂM TRA VÀ THIẾT KẾ TỐI ƯU THEO TRẠNG THÁI GIỚI HẠN

Để tìm tải trọng giới hạn, người ta dựa vào các định lý tĩnh và động của lý thuyết cân bằng giới hạn để tìm cận dưới và cận trên, nếu các cận đó trùng nhau thì ta tìm được giá trị đúng. Đối với các bài toán phức tạp, nói chung cận dưới và cận trên xa nhau. Vì vậy, người ta đặt vấn đề tìm một cận trên nhỏ nhất hoặc một cận dưới lớn nhất, với những giả thiết nhất định.

Đối với hệ liên tục, lần đầu tiên, năm 1965 Koopman D.C., Lance R.H. [17] dùng quy hoạch tuyến tính để tìm tải trọng giới hạn của bản. Sau đó, có các công trình của A. R. Rjanitsưn [18], M.I. Râytman [19], A. A. Tchiras [20] vv..., ứng dụng quy hoạch toán học vào bài toán kiểm tra và thiết kế tối ưu của hệ đàn-dẻo.

Tất cả các công trình trên đều nhằm tìm một cận dưới hay cận trên tốt nhất. ứng với một tổ hợp tải trọng xác định. Song khi kiểm tra khả năng chịu lực của các hệ, người ta cần biết giá trị đúng (không phải là cận) của mọi tổ hợp tải trọng khác nhau (không phải một tổ hợp) tác dụng lên hệ mà hệ không bị phá hoại dẻo.

Vì vậy, có hai vấn đề tồn tại được đặc ra đối với bài toán kiểm tra.

Một là: tìm giá trị đúng của tải trọng giới hạn, nếu có phạm sai số là do phương pháp giải, chứ không phải do cách đặt bài toán.

Hai là: tìm mọi tổ hợp tải trọng tác dụng lên hệ mà hệ an toàn. Hai vấn đề đó đã được giải quyết trong các tiết §1 — §7 của chương I.

Theo một nghĩa nào đó, bài toán thiết kế là bài toán ngược của bài toán kiểm tra. Cho nên các vấn đề tồn tại của bài toán kiểm tra cũng là những vấn đề tồn tại của bài toán thiết kế.

Trong các tiết §8 — §13 của chương I, chúng tôi đã thành lập và đề nghị cách giải bài toán thiết kế tối ưu đối với một tập hợp các tổ hợp tải trọng tác dụng lên hệ.

Trong các tiết §14, §15 chúng tôi trình bày phương pháp đánh giá sai số và xét tính ổn định nghiệm bài toán kiểm tra.

Các kết quả cụ thể thu được ở chương I là:

1 — Bài toán kiểm tra theo trạng thái giới hạn của hệ đàn-dẻo thuần nhất chịu tác dụng tải trọng đơn giản cố định.

$$
(\mathrm{I})\left\{\begin{array}{l}
\lambda_{k_o} \to \max \\
\text{với các điều kiện:} \\
\left\{\begin{array}{lll}
\Delta\vec{Q} = 0 & \forall\vec{x} \in V, \notin S_p, \notin V_p & (1) \\
E\vec{Q} = 0 & \forall\vec{x} \in V_p & (2) \\
N\vec{Q} = \{(\lambda_{ok} + \lambda_k)\, e_k\} & \forall\vec{x} \in S_p & \\
f(\vec{Q}) \leqslant 0 & \forall\vec{x} \in V & \\
\lambda_{k_o} \geqslant 0, \ \forall\lambda_k\ (k \neq k_o) \text{ là tham số} & &
\end{array}\right. \\
\lambda_{k_o} \to \min \\
\text{với các điều kiện:} \\
\left\{\begin{array}{ll}
\Delta\vec{Q} = 0 & \forall\vec{x} \in V, \notin S_p, \notin V_p \\
E\vec{Q} = 0 & \forall\vec{x} \in V_p \\
N\vec{Q} = \{(\lambda_{ok} + \lambda_k)\, e_k\} & \forall\vec{x} \in S_p \\
f(\vec{Q}) \leqslant C & \forall\vec{x} \in V \\
\lambda_{k_o} \leqslant 0, \ \forall\lambda_k\ (k \neq k_o) \text{ là tham số} &
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

λ_{k_o} là tham số tải trọng biến thiên xác định nào đó. Ẩn của bài toán là tương ứng suất suy rộng $Q(\overrightarrow{x})$ và tham số λ_{k_o}.

Δ là toán tử vi phân cân bằng tĩnh.

V là miền hệ chiếm trong không gian $\overrightarrow{x}$ $\{x_1, x_2, x_3\}$
S_p là phần mặt ngoài chịu tác dụng của ngoại lực
V_p là miền thuộc V, mà tại đó khi lực ngoài đạt giá trị tới hạn thì ứng xuất gián đoạn, vị trí của V_p chưa biết trước.

E là toán tử điều kiện cân bằng của các điểm trên V_p N là toán tử điều kiện cân bằng của các điểm trên biên tác dụng ngoại lực S_p.

λ_{ok} là tham số tải trọng xác định

λ_k là tham số tải trọng biến thiên

e_k là thành phần tải trọng cơ sở chọn trước

$f(\overrightarrow{Q}) = C$ là điều kiện dẻo.

Để đơn giản, từ nay về sau ta viết gộp hai điều kiện (1) và (2) trong V và trên V_p là

$$L\overrightarrow{Q} = 0 \ \forall \overrightarrow{x} \in V, \notin S_p .$$

Tiết § 5— 1 của luận văn đã chứng minh được rằng việc chọn tham số λ_{k_o} làm hàm mục tiêu là tùy ý, khi thay đổi vai trò của các tham số tải trọng thì kết quả vẫn trùng nhau.

2 — Bài toán kiểm tra theo trạng thái giới hạn của hệ chịu tác dụng tải trọng di động.

Theo quan niệm của cơ học kết cấu, với những giả thiết nhất định tải trọng chuyển động có thể coi như tải trọng cố định, tác dụng không đồng thời, tại một

số điểm rời rạc trên đường đặt tải [21]. Vì vậy, từ bài toán (I) đối với tải trọng cố định có thể suy ra bài toán với tải trọng di động.

Gọi $S_p^{(i)}$ $(i = 1, 2, ..., p)$ là phần mặt S chịu tác dụng đồng thời của các tải trọng rời rạc. Ta có bài toán:

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_{k_o} \to \max \\ \text{Với các điều kiện:} \\ \left\{\begin{array}{l} L\vec{Q}^{(j)} = 0 \quad \forall\vec{x} \in V, \notin S_p^{(j)} \\ N\vec{Q}^{(j)} = \{(\lambda_{ok} + \lambda_k)\, e_k\}^{(j)} \ \forall\vec{x} \in S_p^{(j)} \\ f(\vec{Q}^{(j)}) \leqslant C\, \forall\vec{x} \in V \quad (j = 1, 2..., p) \\ \lambda_{k_o} \leqslant 0 \qquad \forall\lambda_k\ (k \neq i) \text{ là tham số} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

II

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_{k_o} \to \min \\ \text{Với các điều kiện:} \\ \left\{\begin{array}{l} L\vec{Q}^{(j)} = 0\ \forall\vec{x} \in V, \notin S_p^{(j)} \\ N\vec{Q}^{(j)} = \{(\lambda_{ok} + \lambda_k)\, e_k\}^{(j)} \quad \forall\vec{x} \in S_p \\ f(\vec{Q}^{(j)}) \leqslant C \ \ \forall\vec{x} \in V \quad (j = 1, 2, ..., p) \\ \lambda_{k_o} \leqslant 0\,, \qquad \forall\lambda_k\ (k \neq k_o) \text{ là tham số} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

3 – Bài toán kiểm tra theo trạng thái giới hạn của hệ tổ hợp. Xét trường hợp hệ gồm một số hữu hạn phần tử, mỗi phần tử được cấu tạo bởi một loại vật liệu dẻo khác nhau. Từ bài toán (I) ta suy ra:

$$
\text{(III)}\quad
\left\{
\begin{array}{l}
\lambda_{k_0} \to \max \\
\text{Với các điều kiện:} \\
\left\{
\begin{array}{l}
L_j\vec{Q}^{(j)} = 0 \qquad \forall\vec{x} \in V_j\,, \notin S_p^{(j)} \\
N_j\vec{Q}^{(j)} = \{(\lambda_{ok} + \lambda_k)\, e_k\}^{(j)}\, \forall\vec{x} \in S_p^{(j)} \\
f_j(\vec{Q}^{(j)}) \leqslant C \quad \forall\vec{x} \in V_j \quad (j = 1, 2, \ldots, g) \\
\lambda_{k_0} \geqslant 0, \quad \forall\lambda_k\ (k \neq k_o) \ \text{là tham số}
\end{array}
\right. \\
\\
\lambda_{k_0} \to \min \\
\text{Với các điều kiện:} \\
\left\{
\begin{array}{l}
L_j\vec{Q}^{(j)} = 0, \quad \forall\vec{x} \in V_j \notin S_p^{(j)} \\
N_j\vec{Q}^{(j)} = \{(\lambda_{ok} + \lambda_k)\, e_k\}^{(j)} \quad \forall\vec{x} \in S_p^{(j)} \\
f_j(\vec{Q}^{(j)}) \leqslant C \quad \forall\vec{x} \in V \\
\lambda_{k_0} \leqslant 0, \quad \forall\lambda_k\ (k \neq k_o) \ \text{là tham số}
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

Chỉ số « j » ứng với phần tử « j ».

4. Xấp xỉ trường ứng suất.

Một đặc điểm quan trọng của bài toán trạng thái giới hạn là khi tải trọng đạt giá trị tới hạn thì trường ứng suất tĩnh cho phép tương ứng có thể gián đoạn [22], song gián đoạn ở đâu thì chưa biết trước, nếu coi ứng suất liên tục như các công trình trước đây [17, 30, ...] thì chỉ tìm được cận dưới của tải trọng giới hạn. Để phản ánh được đặc điểm nói trên, chúng tôi đề nghị dùng một trong hai mô hình xấp xỉ trường ứng suất sau :

a) Mô hình phần tử ứng suất thuần nhất (đều)

Chia V thành một số hữu hạn phần tử, coi gần đúng các điểm trong của mỗi phần tử, coi gần đúng các đặc điểm trong của mỗi phần tử có trạng thái ứng suất như nhau. Như vậy điều kiện cân bằng của các điểm trong của các điểm trên biên (lát cắt tương đương). Từ đó suy ra quan hệ giữa các ứng lực trên biên giữa các phần tử. Trong mỗi phần tử ta chọn một hệ tọa độ xác định nào đó, chọn ứng suất đặc trưng cho phần tử đối với hệ tọa độ đã chọn, biểu diễn ứng suất trên biên qua ứng suất đặc trưng. Trong mỗi phần tử, điều kiện dẻo chỉ cần thỏa mãn đối với ứng suất đặc trưng. Mô hình xấp xỉ này đã được đề cập đến trong [22], song chỉ cho trường hợp riêng đơn giản.

b) Mô hình phần tử cứng hay đàn hồi

Chia V thành một số hữu hạn phần tử, các điểm trong của mỗi phần tử coi gần đúng là luôn luôn ở trạng thái cứng hay đàn hồi tuyệt đối và vô hạn, chảy dẻo chỉ có thể xảy ra trên biên giữa các phần tử.

Trên một lát cắt giữa hai phần tử, có hai hệ ứng suất ứng với hai phần tử kề nhau.

Trong mô hình này điều kiện cân bằng không chỉ lập cho các điểm trên biên mà còn cho từng phần tử, còn điều kiện dẻo thì chỉ cần thỏa mãn đối với các điểm trên biên. Trên mỗi biên chỉ là một lát cắt, ứng suất trên đó không thể đặc trưng cho trạng thái ứng suất tại một điểm, để thỏa mãn điều kiện dẻo ta tiến hành như sau:

Tại mỗi điểm nút, ta có ứng suất trên các mặt (đường) từ các ứng suất đó chuyển chúng về một hệ tọa độ thích hợp, cuối cùng cho thỏa mãn điều kiện dẻo tại điểm đó.

Trường hợp riêng, khi $\forall\lambda_i = 0$ thì các bài toán trên trở thành bài toán tìm một tổ hợp tải trọng cực đại tác dụng lên hệ, mà hệ không bị phá hoại dẻo, như Koopman D. C. [17] và M. Fraint [30] đã xét.

Luận văn đã giải ba thí dụ bằng số : bản vuông có lát cắt ở giữa song song với cạnh, chịu kéo đều theo hai phía đối diện ; bản tròn tựa bản lề chịu tải trọng phân bố đều ; bản vành biên trong tự do, biên ngoài tựa bản lề, chịu kéo và nén đều. Kết quả thu được trùng với kết quả tính theo các phương pháp khác.

6. Bài toán thiết kế tối ưu theo trạng thái giới hạn :

Gọi G là miền tải trọng mà hệ có thể phải chịu đựng. Các điểm cực biên của bao lồi biên tuyến tính từng khúc của G là $P_1, P_2, \ldots, P_h$. Ta coi hệ phải chịu tác dụng của h tải trọng không đồng thời P_i $(i = 1, 2, \ldots, h)$.

Hàm mục tiêu của bài toán thiết kế

$$I = \int_V F(\vec{\tau})\, dv,$$

có thể là trọng lượng, thể tích, giá thành v. v... Trong đó $\vec{\tau} = \{ r_i \}$ là vectơ các tham số thiết kế. Hệ an toàn đối với toàn miền. Vì vậy ta có bài toán :

$$\begin{cases} \int F(\vec{\tau})\, dv \to \min \\ \text{Với các điều kiện} \\ \begin{cases} L\vec{Q}^{(k)} = 0 & \forall \vec{x} \in V, \notin S_p^{(k)} \\ N\vec{Q}^{(k)} = \vec{P}_k & \forall \vec{x} \in S_p^{(k)} \\ f(\vec{Q}^{(k)}) \leqslant C(\vec{\tau}) & \forall \vec{x} \in V \quad (k = 1, 2, \ldots, h) \end{cases} \end{cases}$$

Ẩn của bài toán là $\vec{\tau} = \{ \tau_i \}$ và $\vec{Q}^{(k)}(x)$.

7. Phương pháp giải bài toán thiết kế tối ưu theo trạng thái giới hạn :

a) Trường hợp miền tải trọng cho trước có một điểm cực biên (không kể gốc).

Nếu điều kiện dẻo trơn (chẳng hạn điều kiện Misès), và từ điều kiện $f = C(\overrightarrow{\tau})$ ta suy ra, chẳng hạn

$$\tau_1 = (j, Q_i)$$

Thay τ_1 vào hàm mục tiêu ta có

$$I = \int_{(v)} \Phi(\tau_j, Q_i)\, dV.$$

Như vậy ta đã loại được ràng buộc phi tuyến, bài toán thiết kế tối ưu trở thành bài toán quy hoạch phi tuyến dạng dạng đơn giản nhất :

$$\begin{cases} \sum\limits_j \Phi_j(x_i)\,\Delta_j \to \min \\ \text{với các điều kiện} \\ \sum\limits_j a_{ij}\, x_j = b_i \quad (i = 1, 2, ...) \end{cases}$$

— Nếu điều kiện dẻo không trơn (chẳng hạn điều kiện Trèsca). Ta đặt $C(\overrightarrow{\tau}) = x_{n+1}$, và giả sử rằng $F = F(x_{n+1})$, thì bài toán thiết kế cũng đưa về dạng trên.

b) Trường hợp miền tải trọng cho trước có lớn hơn một điểm cực biên (không kể gốc).

Điều kiện dẻo ứng với các điểm cực biên của miền tải trọng là :

$$f(\overset{(k)}{Q}) \leqslant C(\overrightarrow{\tau}) \quad (k = 1, 2, ..., p)$$

Khi đặt $C(\overrightarrow{\tau}) = Q_o$, với những giả thiết tương tự như trên ta có bài toán :

b) Ổn định và sai số nghiệm của bài toán quy hoạch tuyến tính và ứng dụng.

Gọi X_0, Y_0 là nghiệm của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu. Các hệ số a_{ij}, b_i, c_j nhận các gia số tương ứng, δa_{ij} δb_i, δc_j, thì nghiệm của bài toán xuất phát và bài toán đối ngẫu là

$$X_1 = X_0 + \delta X, \quad Y_1 = Y_0 + \delta Y$$

Định nghĩa : Nhiệm X_0 Y_0 được gọi là ổn định, khi các hệ số a_{ij}, b_i, c_j biến thiên tùy ý trong miền xác định nào đó, nếu cơ sở tối ưu của bài toán trực tiếp và bài toán đối ngẫu trước và sau khi «kích động» được thành lập trên cùng một hệ véc tơ cơ sở (hệ véctơ cùng chỉ số).

Gọi Γ là tập hợp các chỉ số trong các điều kiện, thỏa mãn tại X_0, Y_0 dưới dạng đẳng thức, thì điều kiện ổn định là :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta x_j + \sum_{j=1}^{n} x_j^0 \delta a_{ij} = \delta b_i \quad \forall_i \in \Gamma$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta x_j + \sum_{j=1}^{n} x_j^0 \delta a_{ij} \leqslant \delta b_i + b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 \quad \forall_i \notin \Gamma$$

$$(i = 1,2,\ldots, m_1 \leqslant m)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta x_j + \sum_{j=1}^{n} x_j^0 \delta a_{ij} = \delta b_i \quad \forall_i \ (i = m_1 + 1,\ldots, m)$$

$$\delta x_j = 0 \quad \forall_j \in \Gamma$$

$$\delta x_j \geqslant - x_j^0 \quad \forall_j \notin \Gamma \ (j = 1,2,\ldots, n_1 \leqslant n)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\delta y_i + \sum_{i=1}^{m} y_i^0 \delta a_{ij} = \delta c_j \quad \forall_j \in \Gamma$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji}\,\delta y_i + \sum_{i=1}^{m} y_i^{o}\,\delta a_{ij} \geqslant \delta c_j + c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\,y_i^{o}$$

$$\forall_j \notin \Gamma \quad (i = 1,2,\ldots,\, n_1 \leqslant n)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\,y_i + \sum_{i=1}^{m} y_i^{o}\,\delta a_{ij} = \delta c_j \;\forall_j$$

$$(j = n_1 + 1,\ldots,\, n)$$

$$\delta y_i \geqslant 0 \qquad \forall_i \in \Gamma$$

$$y_i \geqslant -\, y_i^{o} \qquad \forall_i \notin \Gamma \qquad (i = 1,2,\ldots,\, m_1 \leqslant m)$$

Trong đó c_j là hệ số của hàm mục tiêu; a_{ij} là hệ số của ma trận điều kiện; b_i là hệ số tự do; m_1 là số điều kiện dạng bất đẳng thức; $m - m_1$ là số điều kiện dạng đẳng thức. Các biến phân δa_{ij}, δb_i, δc_j là đủ nhỏ, nên đã bỏ qua các số hạng bậc hai của các biến phân, X_o, Y_o coi như đã biết. Luận văn đã đề nghị phương pháp giải bài toán ổn định theo điều kiện nêu trên và xét một thí dụ để minh họa.

Luận văn cũng đã áp dụng các kết quả trên vào xét ổn định và đánh giá sai số nghiệm bài toán kiểm tra.

CHƯƠNG II

BÀI TOÁN KIỂM TRA VÀ THIẾT KẾ TỐI ƯU THEO TRẠNG THÁI THÍCH ỨNG

Năm 1938, E. Melan đã chứng minh định lý tĩnh sự thích ứng của hệ đàn-dẻo lý tưởng ba chiều với tải trọng tựa tĩnh [16]. Năm 1957 B. Prager đã tổng quát hóa định lý E. Melan cho trường hợp hệ đồng thời chịu tác dụng của nhiệt độ và tải trọng [27]. Theo các định

lý đó để xác định miền thích ứng gặp nhiều khó khăn. Năm 1958, V. I. Rodenblum [28] đưa ra phương pháp tìm miền thích ứng bằng lý thuyết bao hình, song phương pháp đó còn có nhiều hạn chế [3].

Gần đây A. A. Tchiras [20] đã ứng dụng quy hoạch toán học vào một loạt công trình nghiên cứu về bài toán thích ứng, song chỉ mới dừng lại ở việc thành lập bài toán, mà chưa nêu cách giải.

Trong các công trình kể trên, đều nhằm xét bài toán cho một lớp tải trọng xác định. Ở đây chúng tôi đặt vấn đề tìm một miền, mà tải trọng tựa tĩnh biến thiên tùy ý thuộc miền đó thì hệ thích ứng (nhiệt độ được coi là trường hợp riêng của tải trọng).

Theo định lý E. Melan, điều kiện để hệ thích ứng trên miền tải trọng G là

$$\exists \vec{\rho}(x) \qquad \forall \vec{P} \in G \ (_*)$$

$\vec{\rho}\ (\vec{x})$ là trường ứng suất dư không phụ thuộc thời gian $\vec{P}(\vec{x}, \vec{t})$ là tải trọng.

Điều kiện $(_*)$ quá chặt chẽ, một kết quả khác là luận văn đã chứng minh định lý gọi là định lý E. Melan mở rộng, trong đó điều kiện $(_*)$ thay bởi điều kiện nhẹ hơn, có tính chất địa phương. Nhờ đó, tìm được miền thích rộng hơn, trong khi định nghĩa về sự thích ứng vẫn như cũ. Trên cơ sở định lý E. Melan mở rộng, luận văn đã nêu cách giải bài toán thích ứng.

Để minh họa cho các kết quả trên, luận văn đã giải hai thí dụ bằng số. Ngoài ra, luận văn đã chứng minh: Miền thích ứng là miền lồi trong không gian tải trọng.

Bài toán thiết kế tối ưu theo trạng thái thích ứng từ trước tới nay ít được nghiên cứu, luận văn cũng đã xét một số trường hợp riêng của bài toán này.

Các kết quả cụ thể thu được trong chương II là:

1 — Bài toán thích ứng trên cơ sở định lý E. Melan

Không mất tính chất tổng quát, gọi k_1, k_2 là các trọng số không âm của phương λ_1, $\overrightarrow{q_k}$ là ứng suất đàn hồi ứng với tải trọng cơ sở e_k.

Bước I: Giải bài toán

$$\begin{cases} \lambda_1 \rightarrow \max \\ \text{Với các điều kiện} \\ \begin{cases} L\,\overrightarrow{\rho_1} = 0 & \forall \overrightarrow{x} \in V, \notin S_p \\ N\,\overrightarrow{\rho_1} = 0 & \forall \overrightarrow{x} \in S_p \\ f[\overrightarrow{\rho_1} + (\lambda_{o1} + k_1\lambda_1)\overrightarrow{q_1}] \leqslant C & \forall \overrightarrow{x} \in V \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f[\overrightarrow{\rho_1} + (\lambda_{o1} - k_2\lambda_1)\overrightarrow{q_1}] \leqslant C & \forall \overrightarrow{x} \in V \\ \lambda_1 \geqslant 0; \quad \overrightarrow{\rho_1}(x) \text{ và } \lambda_1 \text{ là ẩn của bài toán.} \end{cases}$$

Giải bài toán trên ta thu được

$k_1(\lambda_1)_{max} = \lambda_1^+$, $k_2(\lambda_1)_{max} = \lambda_1^-$ và trường ứng suất dư tương ứng $\overrightarrow{\rho_1^*}(x)$.

Bước II: Giải bài toán

$$\begin{cases} \lambda_2 \rightarrow \max \\ \text{Với các điều kiện} \\ \begin{cases} f[\overrightarrow{\rho_1^*} + \sum\limits_{k=1}(\lambda_{ok} + \lambda_k)\overrightarrow{q_k}] \leqslant C & \forall \overrightarrow{x} \in V \\ \lambda_2 \geqslant 0, \forall \lambda_k\ (k \neq 2) \text{ là tham số,} \\ -\lambda_1^- \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_1^+ \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2 \to \min \\ \text{Với các điều kiện} \\ \begin{cases} f[\vec{\rho}_1^{+} + \sum_{k=1} (\lambda_{ok} + \lambda_k) \vec{q}_k] \leqslant C \quad \forall \vec{x} \in V \\ \lambda_2 \leqslant 0, \ \forall \lambda_k \ (k \neq 2) \text{ là tham số,} \\ -\lambda_1^{-} \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_1^{+} \end{cases} \end{cases}$$

2. Bài toán thích ứng khi hệ đồng thời chịu tác dụng của tải trọng và trường nhiệt không dừng.

Trong bài toán này coi quy luật phân bố nhiệt đã biết. Theo V.I. Rodenblum [28], chẳng hạn chọn quy luật phân bố nhiệt là:

$$\theta(\vec{x}, t) = K(t) + H(t)\, S(\vec{x})$$

thì ứng suất đàn hồi do nhiệt gây ra là

$$\vec{q}^{*} = K(t)\, \vec{S}' + H(t)\, \vec{S}''(x)$$

ứng suất tổng cộng là

$$\vec{\sigma} = \vec{\rho} + \vec{q}^{*} + \sum_{k=1} (\lambda_{ok} + \lambda_k) \vec{q}_k$$

trong đó H(t) và K(t) là hàm đã biết của thời gian t, $\vec{S}'(x)$, $\vec{S}''(x)$ là các hàm đã biết của $\vec{x}$ khi đã biết quy luật phân bố nhiệt $\theta(\vec{x}, t)$, ta tìm miền biến thiên lớn nhất của K(t) và H(t), nghĩa là coi chúng là các tham số tải trọng.

Đặt vấn đề như vậy, sẽ dẫn đến bài toán tìm miền mà mọi quy luật phân bố nhiệt, với điều kiện là H(t) và K(t) nằm trong miền đó thì hệ thích ứng. Khi đã coi H(t) và K(t) là tham số tải trọng thì bài toán thích ứng được thiết lập hoàn toàn tương tự như trên.

3. Định lý E. Melan mở rộng

a) Định lý E. Melan mở rộng dạng I:

Hệ đàn-dẻo lý tưởng chịu tác dụng của tải trọng và nhiệt độ biến thiên theo quy luật tùy ý (tựa tĩnh) trên G, là thích ứng trên G, nếu tại mỗi điểm bất kỳ $P_* \in G$ tồn tại một lân cận ΔP^* của P^* và tồn tại một trường ứng suất dư không phụ thuộc thời gian $\overrightarrow{\rho_{p^*}}(\overrightarrow{x})$, sao cho tổng trường ứng suất dư đó với trường ứng suất đàn hồi lý tưởng ứng với mọi điểm $P \in \Delta P^*$ là an toàn $\forall \overrightarrow{x} \in V$.

Hệ không thích ứng trên G, nếu ít ra có một điểm $P^* \in G$ nào đó không tồn tại lân cận ΔP^* hoặc không tồn tại trường ứng suất dư $\overrightarrow{\rho}_{P^*}(x)$, sao cho tổng trường ứng suất dư đó với trường ứng suất đàn hồi lý tưởng $\forall P \in \Delta P^*$ là cho phép.

b) Định lý E. Melan mở rộng dạng II:

Hệ đàn-dẻo lý tưởng chịu tác dụng của tải trọng và nhiệt độ biến thiên theo quy luật tùy ý (tựa tĩnh) trên G, là thích ứng trên G, nếu trên mỗi miền con G_1, tồn tại một trường ứng suất dư không phụ thuộc thời gian $\overrightarrow{\rho}^{(x)}_{G_i}(x)$ sao cho tổng trường ứng suất dư đó với trường ứng suất đàn hồi lý tưởng $\forall p \in Gi$ là an toàn $\forall \overrightarrow{x} \in V$.

Hệ không thích ứng trên G, nếu ít ra có một miền con G_i nào đó, không tồn tại trường ứng suất dư không phụ thuộc thời gian, để tổng trường ứng suất dư đó với trường ứng suất đàn hồi lý tưởng $\forall P \in G_i$ là cho phép $\forall \overrightarrow{x} \in V$.

Ghi chú : Trên đây ta đã coi G được chia thành một số hữu hạn miền con G_i đóng, liên thông, lớn hơn một điểm.

Thật ra, có thể phát biểu hai dạng trên vào một định lý chung, song phát biểu riêng dạng hai để dễ ứng dụng hơn.

c) Hệ quả : Miền thích ứng theo định lý E. Melan mở rộng là miền lồi trong không gian tải trọng.

4 – Bài toán thích ứng trên cơ sở định lý E. Melan mở rộng :

Tìm miền thích ứng trên cơ sở định lý E. Melan mở rộng bằng cách tìm cận dưới, cận trên và cách khai triển từ cận dưới dần về cận trên.

a) Bài toán tìm cận trên :

$$\begin{cases} \lambda_{k_0} \to \max \\ \text{Với các điều kiện} \\ \begin{cases} L\vec{\rho} = 0 \quad \forall \vec{x} \in V, \ \notin S_p \\ N\vec{\rho} = 0 \quad \forall \vec{x} \in S_p \\ f\,[\vec{\rho} + \sum_{k=1} (\lambda_{ok} + \lambda_k)\,\vec{q_k}] \leqslant C \quad \forall \vec{x} \in V \\ \lambda_{k_0} \geqslant 0, \quad \forall \lambda_k \ (k \neq k_0) \text{ là tham số} \end{cases} \end{cases}$$

$$\lambda_{k_0} \to \min$$

$$\begin{cases} \text{Với các điều kiện} \\ \begin{cases} L\vec{\rho} = 0 \quad \forall \vec{x} \in V, \ \notin S_p \\ N\vec{\rho} = 0 \quad \forall \vec{x} \in S_p \\ f\,[\vec{\rho} + \sum_{k=1} (\lambda_{ok} + \lambda_k)\,\vec{q_k}] \leqslant C \quad \forall \vec{x} \in V \\ \lambda_{k_0} \leqslant 0, \quad \forall \lambda_k \ (k \neq k_0) \text{ là tham số} \end{cases} \end{cases}$$

Trong đó $\vec{\rho}$ và λ_{k_o} là ẩn của bài toán. Dễ dàng chứng minh cận trên là miền lồi.

b) Bài toán tìm cận dưới của miền thích ứng :

Chọn cận dưới là miền thích ứng trên cơ sở định lý E. Melan (đã trình bày ở trên).

c) Bài toán thác triển từ cận dưới dần về cận trên.

Có thể thác triển theo hướng bất kỳ, chẳng hạn theo hướng λ_1.

Gọi biên của cận dưới trên hướng λ_1 là λ_1° .Bài toán thác triển là

$$
\begin{cases}
\lambda_1 \to \max \\
\text{Với các điều kiện} \\
\begin{cases}
L\vec{\rho} = 0 \quad \forall\vec{x} \in V, \quad \notin S_p \\
N\vec{\rho} = 0 \quad \forall\vec{x} \in S_p \\
f\,[\vec{\rho} + \sum\limits_{k=1} (\lambda_{ok} + \lambda_k)\,\vec{q_k}\,] \leqslant C \quad \forall\vec{x} \in V \\
f\,[\vec{\rho} + (\lambda_{o1} + \mathring{\lambda}_1)\,\vec{q_1}\,] \leqslant C \\
\forall\vec{x} \in V \quad \forall\lambda_k \quad (k \neq 1) \quad \text{là tham số}
\end{cases}
\end{cases}
$$

Tiếp tục thác triển tương tự trên mọi phương, dấu hiệu dừng lại là bài toán thác triển chỉ có một phương án duy nhất.

5 — Phương pháp giải bài toán thích ứng

Khi nghiên cứu bài toán thích ứng người ta coi ứng suất đàn hồi đã biết.

Ta xấp xỉ trường ứng suất dư $\vec{\rho}(x)$. bằng một mô hình gần đúng đúng nào đó. Như vậy điều kiện cân bằng trở thành một hệ hữu hạn các phương trình tuyến

tính thuần nhất. Nếu điều kiện dẻo là tuyến tính từng khúc, thì nó được biểu diễn dưới dạng một hệ bất đẳng thức bậc nhất đối với ρ_{ij} và λ_k. Do đó, bài toán thích ứng trở thành bài toán quy hoạch tham số tuyến tính.

Thuật toán giải các bài toán đó đã được trình bày tỷ mỷ trong các tài liệu [23, 24].

Trường hợp khả năng tính toán không cho phép, ta dùng phương pháp giảm ẩn (như vậy chỉ tìm được cận dưới).

Chẳng hạn, trường hợp hai tham số tải trọng, ứng suất đàn hồi là

$$(\lambda_{01} + \lambda_1)\overrightarrow{q_1} + (\lambda_{02} + \lambda_2)\overrightarrow{q_2}$$

Giả sử ta chọn được một trường ứng suất dư không phụ thuộc thời gian $\overrightarrow{\rho}$, thì $\alpha\overrightarrow{\rho}$ cũng là một trường ứng suất dư, α là tham số chưa xác định.

Trường ứng suất tổng cộng là

$$\sigma_{ij} = \left(\lambda_{01} + \lambda_1\right) q_{ij}^{(1)} + \left(\lambda_{02} + \lambda_2\right) q_{ij}^{(2)} + \alpha\rho_{ij}$$

Lập lại bài toán thích ứng tương tự như trên, ẩn của bài toán là λ_1 và α, còn λ_2 là tham số. Trường hợp nhiều chiều ta cũng tiến hành hoàn toàn tương tự.

Để minh họa và so sánh, luận văn đã xét hai thí dụ bằng số: kéo và xoắn đồng thời của tròn; đĩa quay chịu tác dụng của trường nhiệt độ không dừng.

6 — Bài toán thiết kế tối ưu theo trạng thái thích ứng:

Cũng tương tự như bài toán thiết kế tối ưu theo trạng thái giới hạn. Bài toán thiết kế thích ứng là

$$I = \int_{(V)} F(\overrightarrow{\tau})\, dV \to \min$$

Với các điều kiện

$$\begin{cases} L\vec{\rho}^{(i)} = 0 & \forall\vec{x} \in V, \notin S_p^{(i)} \\ N\vec{\rho}^{(i)} = 0 & \forall\vec{x} \in S_p^{(i)} \\ f\left\{\vec{\rho}^{(i)} + \left[\sum\limits_{k=1} (\lambda_{0k} + \lambda_k)\vec{q_k}\right]^{(i)}\right\} \leqslant C \\ \qquad\qquad \forall\vec{x} \in V \\ f(\vec{\rho}^{(i)}) \leqslant C \quad \forall\vec{x} \in V \quad (i = 1, 2, ..., p) \end{cases}$$

trong đó $\vec{\rho}^{(i)}$ $(i = 1,\ 2,\ ...,\ p)$ là ứng suất dư ứng với các điểm cực biên của miền tải trọng G.

7. Phương pháp giải bài toán thiết kế tối ưu theo trạng thái thích ứng.

Giải bài toán thiết kế tối ưu theo trạng thích ứng gặp nhiều khó khăn. vì ứng xuất đàn hồi $\vec{p_k}$ phụ thuộc tham số thiết kế $\vec{\tau}$. Vì vậy sau đây chúng tôi chỉ xét một số trường hợp riêng.

a) Trường hợp miền thích ứng có một điểm cực biên (không kể gốc).

— Nếu là điều kiện dẻo trơn, từ đẳng thức

$$f\ \{\vec{\rho} + \Sigma(\lambda_{0k} + \lambda_k)\ \vec{q_k}\ (\vec{x}, \vec{\tau})\} = C,$$

và có thể suy ra, chẳng hạn

$$\tau_1 = \psi\ (\vec{\tau}, \vec{\rho})$$

Khi các tham số thiết kế không chứa trong điều kiện cân bằng, thay τ_1 vào hàm mục tiêu ta có bài toán

$$\begin{cases} I = \int\limits_{(V)} \Phi(\vec{\tau}, \vec{\rho})\, dV \to \min \\ \text{Với các điều kiện} \\ \begin{cases} L\vec{\rho} = 0 & \forall \vec{x} \in V, \notin S_p \\ N\vec{\rho} = 0 & \forall \vec{x} \in S_p \end{cases} \end{cases}$$

$$|f(\vec{\rho}) \leqslant C \qquad (*)$$

Điều kiện (*) có thể không xét đồng thời mà kiểm tra lại sau.

— Nếu điều kiện dẻo không trơn, khi đặt $C(\vec{\tau}) = x_{n+1}$ giả sử rằng F được biểu diễn dưới dạng $\Phi(x_{n+1})$ và q_{ij} là hàm bậc nhất của $\vec{\tau}_i$, thì ta cũng có bài toán quy hoạch phi tuyến dạng đơn giản.

b) Trường hợp miền thích ứng có số điểm cực biên lớn hơn một (không kể gốc).

Nói chung không thể thỏa mãn f = c với mọi điểm cực biên. Cũng tương tự như trường hợp trên, song không khử được điều kiện dẻo và phải thỏa mãn với mọi điểm cực biên.

8 — Quan hệ giữa bài toán phá hủy dẻo đơn giản và bài toán thích ứng.

Căn cứ theo các hệ thức toán học thu được, luận văn đã chứng minh : miền tải trọng thích ứng thuộc vào miền tải trọng an toàn (không bị phá hoại dẻo đơn giản) và đưa ra một số nhận xét về quan hệ giữa hai bài toán.

CHƯƠNG III

ỨNG DỤNG

Những vấn đề nêu sau đây là những bài toán phức tạp, muốn giải quyết trọn vẹn phải nghiên cứu nhiều vấn đề. Luận văn chỉ trình bày một số ý kiến về những khía cạnh có liên quan đến các bài toán của hai chương trên.

1 — Cách khắc phục mâu thuẫn giữa tính toán nội lực và kiểm tra tiết diện của phương pháp tính toán theo trạng thái giới hạn.

Sau khi trình bày nội dung và lý do tồn tại mâu thuẫn, bằng lý luận rút ra từ các hệ thức toán học, luận văn đã đi đến các kết luận:

a) Tính toán theo phương pháp hiện hành như quy phạm ban hành thì vẫn an toàn, song chưa tận dụng hết khả năng chịu lực của vật liệu, nói cách khác không cho ta phương án tối ưu.

b) Để có phương án tối ưu, ta giải trực tiếp bài toán thiết kế tối ưu theo trạng thái giới hạn, như đã trình bày ở chương I, trong điều kiện nước ta hiện nay có đủ khả năng giải bài toán đó.

2 — Tính hệ liên hợp Thanh — Bản — Vỏ

Bằng phương pháp xấp xỉ trường ứng suất theo mô hình các phần tử hữu hạn, các chỗ nối đều được chọn là các lát cắt tưởng tượng.

Sau khi xác định nội lực, ta lập phương trình cân bằng, điều kiện dẻo và hàm mục tiêu. Giải bài toán theo phương pháp trình bày ở chương I. Như vậy khó khăn tính toán hệ liên hợp được khắc phục.

3 — Thiết kế hệ đàn hồi có trọng lượng cực tiểu.

Mối liên hệ giữa thiết kế đàn hồi có trọng lượng cực tiểu và thiết kế dẻo có độ bền đều đã được M. Save thiết lập [29]. Sau khi chứng minh một loạt định lý tác giả đã đi đến kết luận:

Thiết kết dẻo có trọng lượng cực tiểu, nhưng tải trọng giảm $1/\varphi$ lần, trong đó

$$\varphi = \frac{F_1}{F_2}$$

$F_1 \leqslant k^2$ là điều kiện đàn hồi

$F_2 \leqslant k^2$ là điều kiện dẻo

Dựa vào mệnh đề trên, giải bài toán thiết kế giới hạn tối ưu (trọng lượng cực tiểu) ứng với tải trọng $\vec{P}$ thì ta có thiết kế đàn hồi có trọng lượng cực tiểu với tải trọng $\vec{P}/\varphi$.

Như vậy, phương pháp giải bài toán thiết kế tối ưu trình bày ở chương I, có thể áp dụng trực tiếp để giải bài toán thiết kế tối ưu hệ đàn hồi có trọng lượng cực tiểu.

MỘT SỐ TÀI LIỆU ĐÃ CÔNG BỐ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN NỘI DUNG LUẬN ÁN

1. Nguyễn Văn Phó:

Giải bài toán trạng thái giới hạn bằng lý thuyết quy hoạch toán học.

Thông báo khoa học, Đại học Tổng hợp, Toán học tập VI — 1971.

2. Nguyễn Văn Phó :

Xác định khả năng chịu lực của các công trình bằng quy hoạch tuyến tính.

Báo cáo tại hội nghị Toán học toàn miền Bắc lần thứ nhất, năm 1971.

3 Nguyễn Văn Phó :

Xác định khả năng chịu lực của hệ chịu tác dụng của tải trọng và nhiệt độ biến thiên bằng lý thuyết quy hoạch.

Tạp chí khoa học kỹ thuật UBKHKTNN số 6-1972.

4. Nguyễn Văn Phó :

Ứng dụng quy hoạch toán học vào một số bài toán cơ học.

Tạp chí Toán học — UBKHKTNN — tập 1, số 4, 12-1973.

5. Nguyễn Văn Phó :

Giải bài toán trạng thái giới hạn bằng phương pháp phần tử hữu hạn.

Tạp chí khoa học kỹ thuật — UBKHKTNN — số 5-1973.

6. Nguyễn Văn Phó :

Về một phương pháp thiết kế tối ưu hệ đàn hồi-dẻo.

Tạp chí khoa học kỹ thuật UBKHKTNN—số 9-1974.

7. Nguyễn Văn Phó :

Nghiên cứu một số bài toán thiết kế tối ưu bằng các phương pháp quy hoạch toán học.

Tạp chí khoa học kỹ thuật UBKHKTNN—số 2-1974.

8. Nguyễn Văn Phó :

Về một phương pháp nghiên cứu sự ổn định và đánh giá sai số nghiệm bài toán quy hoạch tuyến tính.

Tạp chí Toán học, VKHVN, tập III, số 4 — 12-1975.

9. Nguyễn Văn Phó :

Bàn về cách khắc phục mâu thuẫn giữa tính toán nội lực và kiểm tra tiết diện của phương pháp trạng thái giới hạn.

Tạp chí khoa học kỹ thuật VKHVN — số 8-1975.

10. Nguyễn Văn Phó :

Giải bài toán kiểm tra và thiết kế tối ưu các kết cấu bêtông cốt thép bằng lý thuyết quy hoạch toán học.

Tuyển tập hội nghị bêtông và bêtông cốt thép toàn miền Bắc lần thứ nhất UBKTCBNN — Hà nội 1975.

11. Nguyễn Văn Phó :

Mở rộng định lý E. Melan và phương pháp giải bài toán kiểm tra và thiết kế tối ưu của hệ chịu tác dụng của tải trọng và nhiệt độ biến thiên.

Tạp chí khoa học kỹ thuật VKHVN — số 3-1976.

12. Nguyễn Văn Phó :

Phương pháp giải một lớp quy hoạch phi tuyến trong bài toán thiết kế tối ưu.

Tạp chí Toán học VKHVN. Tập IV — số 3 — tháng 9-1976.

13. Nguyễn Văn Phó :

Một số vấn đề nhằm góp phần hoàn thiện tiêu chuẩn thiết kế theo trạng thái giới hạn.

Tạp chí khoa học kỹ thuật VKHVN — số 4-1976.

14. Nguyễn Văn Phó :

Ứng dụng quy hoạch toán học vào một số bài toán tối ưu của lý thuyết dẻo.

Báo cáo tại Hội nghị toán học toàn quốc lần thứ hai 1977.

...(TÀI LIỆU TRÍCH DẪN)

15. М. И. РЕЙТМАН, Л. И. ЯРИН.

Оптимизация параметров железобетонных яонструкций на ЭЦВМ.

Стройиздат. Москва 1974.

16. В. Т. КОЙТЕР

Общие теоремы теории упругопластических сред. Изд. Иностранной литературы. Москва.1961.

17. КООРМАИ D. C. LANCE R. H., — On linear programming and plastic analysis — Journal of the Mechanis and Physics of Solids — 13, No 2 — 1965. Руоокий перевод. Механика И° 2 — 1966.

18. А. Р. РЖАНИЦЫН

Рассет оболочек методом предельного равновесия при помоши линейного програмирования. Сб. труды УІ всесоюзной конференции по теории обслочек и пластинок.

Изд. « Наука ». Москва. 1966.

19. Н. И. КАРПЕНКО, М. Й. РЕЙТМАН

Нижная граница несущей способляемости и оптимальное проектирование железобетонных плит.

Сб. Труды VI всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок.
Изд. « Наука ». Москва. 1966.

20. А. А.ЧИРАС
Теория оптимизации в предельном анализе твердого деформируемого тела.
Изд. « Минтис ». Вильнюс. 1971.

21. GROSS O., PRAGER w. — Minimum Weight design for moving loads — Proceedings of the Fourth U.S. National Congress applied Mechanis — Vol 2, 1962. Русский перевод: Механика N° 2 — 1964.

22. G. HODGE — Plastic analysis of Strutures. New York, 1959.

23. Е. Г. ГОЛЬЩТЕЙ, Д. Б. ЮДИН
Новые направлеиия в линейном программировани. « Советское радио ». Москва. 1966.

24. К. Б. ТЕЛЕГЕНОВ, К. К. КАЛЧАЕВ, П. П. ЗАПЛЕТИН
Методы математического программирования. Изд. « Наука » Казахзкой СССР — АЛМА — АТА. 1975.

25. У. И. ЗАНГВИЛЛ
Нелинейное программирование. « Советское радио » — Москва 1973.

26. А. ФИАКО, Г. МАК — КОРМИК
Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. Изд. « Мир ». Москва. 1972.

27. PRAGER W. — Shakedown in elastic, plastic media subjected to cycles of load and temperature.

Symposium su la plasticita nella scienza della construtioni in onone de Arturo Danusso, varenna, Settembre 1956.

Русекий перевод: Механика N° 5 — 1958.

28. В. И. РОЗЕНБЛЮМ

К теории приспособляемость упруго-пластических тел. Изветия Академии Наука СССР — ОТН N° 6-1958.

29. SAVE M. — Some aspects of minimum weight Engineering Plastiticity — Cambridge University Press — 1958.

Русский перевод: Механика N° I-1971.

30. М. Я. ФРАЙНТ

Определение несущей способности цилиндрической оболочек и методом линейного программирования.

Стройтельная механика и расчет сооружений N° I-1969.

In 100c khổ 13 × 19. Tại xưởng in Trường Đại học Tổng hợp Hà nội. Số xuất bản 8/S/GPNT/XB. Xong ngày 20 tháng 1 năm 1979. Nộp lưu chiểu tháng 1 năm 1979.